УДК 517.54

О ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е.А. Широкова

Аннотация

В статье предложена постановка обратной краевой задачи плоской теории упругости. Решение задачи сводится к решению бесконечной системы линейных уравнений.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, граничные смещения, вектор граничных усилий, система линейных уравнений, аналитическая функция

1. Введение

Настоящая статья посвящена постановке и решению обратной краевой задачи плоской теории упругости. Задача состоит в нахождении области, на границе которой заданы вектор граничных смещений и вектор граничных усилий в параметрическом виде, причем значение параметра соответствует одной и той же граничной точке для обоих векторов. В отличие от обратных краевых задач для аналитических функций [1] параметр здесь не имеет смысла геометрической характеристики границы неизвестной области. В настоящей статье задача определения неизвестной границы сводится к решению бесконечной системы линейных уравнений. С каждым решением задачи связывается класс гомотетически подобных областей, также являющихся решением задачи. Приведены случаи разрешимости системы.

2. Сведение данных задачи к краевым задачам дл аналитических функций

Пусть на неизвестной границе $x(t)+iy(t)=z(t)$, $t\in[0,2\pi]$ некоторой области заданы в комплексном виде вектор $R_1(t)=U_1(t)+iV_1(t)$ граничных смещений и вектор $R_2(t)=U_2(t)+iV_2(t)$ граничных усилий. Значения параметра t, $t\in[0,2\pi]$, взаимно однозначно соответствуют точкам неизвестной границы. Вводя комплексные потенциалы $f(z)$ и $g(z)$ плоской теории упругости [2], получим

$$-2\mu R_1(t)=\left[-\kappa f(z)+z\overline{f'(z)}+\overline{g(z)}\right]_{z=z(t)}, \tag{1}$$

$$R_2(t)=\left[f(z)+z\overline{f'(z)}+\overline{g(z)}\right]_{z=z(t)}, \tag{2}$$

где $\kappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$ в случае решения задачи для плоской деформации, $\kappa=\frac{5\lambda+6\mu}{3\lambda+2\mu}$ в случае деформации тонкой пластинки, λ и μ — коэффициенты Ламе. Функции $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические функции в искомой области.

Вычтя из обеих частей уравнения (2) соответствующие части уравнения (1), мы получим соотношение

$$R_2(t)+2\mu R_1(t)=(1+\kappa)f(z(t)). \tag{3}$$

Таким образом, изменение аргумента комплексно-значной функции $R_2'(t) + 2\mu R_1'(t)$ при прохождении параметра t по отрезку $[0, 2\pi]$ должно соответствовать граничному вращению аналитической функции согласно (3). В случае отрицательного приращени аргумента следует сменить направление изменения параметра t.

Построим отображение $F(\zeta)$ единичного круга $|\zeta| < 1$ на область с границей $R_2(t) + 2\mu R_1(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, расположенную, вообще говоря, на римановой поверхности. Мы получим граничное соответствие $F(e^{i\theta}) = R_2(t) + 2\mu R_1(t)$, позволяющее получить связь $t = t(\theta)$ между заданным параметром t и полярным углом θ. В частности, если $R_2'(t) + 2\mu R_1'(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j e^{ijt}$, получим $\theta = t$, $F(\zeta) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j$. Теперь соотношения (1) и (2) примут вид

$$-2\mu R_1(t(\theta) = -\frac{\kappa}{\kappa+1} F(e^{i\theta}) + z(e^{i\theta}) \frac{\overline{(F(e^{i\theta}))'_\theta}}{(1+\kappa)\overline{(z(e^{i\theta}))'_\theta}} + \overline{g(e^{i\theta})}, \tag{4}$$

$$R_2(t(\theta) = \frac{1}{\kappa+1} F(e^{i\theta}) + z(e^{i\theta}) \frac{\overline{(F(e^{i\theta}))'_\theta}}{(1+\kappa)\overline{(z(e^{i\theta}))'_\theta}} + \overline{g(e^{i\theta})}, \tag{5}$$

где $z(\zeta)$ — аналитическая функция, отображающая единичный круг на искомую область. Найдя функцию $z(\zeta)$, мы получим искомую область.

Взяв линейную комбинацию левых и правых частей (4) и (5), получим

$$-2\mu R_1(t(\theta) + \kappa R_1(t(\theta) = (1+\kappa)[z(e^{i\theta}) \frac{\overline{(F(e^{i\theta}))'_\theta}}{(1+\kappa)\overline{(z(e^{i\theta}))'_\theta}} + \overline{g(e^{i\theta})}],$$

или

$$\overline{(z(e^{i\theta}))'_\theta}(-2\mu R_1(t(\theta) + \kappa R_1(t(\theta)) = z(e^{i\theta})\overline{(F(e^{i\theta}))'_\theta} + (1+\kappa)\overline{g(e^{i\theta})(z(e^{i\theta}))'_\theta}.$$

Комплексное сопряжение обеих частей последнего соотношения приводит к равенству

$$(z(e^{i\theta}))'_\theta(-2\mu\overline{R_1(t(\theta)} + \kappa\overline{R_1(t(\theta)}) - \overline{z(e^{i\theta})}(F(e^{i\theta}))'_\theta = (1+\kappa)g(e^{i\theta})(z(e^{i\theta}))'_\theta. \tag{6}$$

Таким образом, выражение в левой части (6) является граничным значением аналитической в единичном круге функции, потому что $(z(e^{i\theta}))'_\theta = ie^{i\theta}z'(e^{i\theta})$ — граничное значение аналитической функции.

3. Сведение решения задачи к решению бесконечной системы линейных уравнений

Рассмотрим разложение известных функций в ряды Фурье:

$$F(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{ik\theta},$$

$$-2\mu R_1(t(\theta)) + \kappa R_1(t(\theta)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\theta}.$$

Будем искать граничное значение неизвестной аналитической функции $z(\zeta)$ также в виде ряда Фурье с неизвестными коэффициентами:

$$z(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\theta}.$$

Теперь левая часть соотношения (6) примет вид

$$i\sum_{k=1}^{\infty} c_k k e^{ik\theta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{ik\theta} - i\sum_{k=1}^{\infty} A_k k e^{ik\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \overline{c_k} e^{-ik\theta}.$$

Полученное выражение, будучи граничным значением аналитической в единичном круге функции, не должно содержать отрицательных степеней $e^{i\theta}$, что приводит к бесконечной системе

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k k B_{-n-k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{c_k}(k-n)A_{k-n} = 0,\ n \in N. \qquad (7)$$

Легко заметить, что если существует решение — функция, отображающа единичный круг на искомую область в виде $z(\zeta) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k$, то функция $\tilde{z}(\zeta) = c_0 + d\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k$ при любом комплексном значении c_0 и любом вещественном значени d — тоже решение. Поэтому кроэффициент c_1 можно зафиксировать, взяв равным 1.

Теперь система (7) примет вид

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k B_{-n-k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{c_k}(k-n)A_{k-n} = -B_{-n-1},\ n \in N. \qquad (8)$$

Систему (8) можно рассматривать как систему относительно неизвестных Rec_k и Imc_k. Рассмотрим случай, когда все коэффициенты известных разложений, то есть A_j, $j \in N$, и B_k, $k \in Z$, вещественны. Очевидно, что тогда искомые коэффициенты c_k, $k = 2, ...$, также вещественны.

В указанном случае система (8) представима в матричной форме:

$$(B - A)c = \tilde{B}, \qquad (9)$$

В левой части (9) представлены матрица $B = [b_{n,j}]_{n=1,j=1}^{\infty,\infty}$, $b_{n,j} = B_{-n-j-1}$, и треугольна матрица $A = [a_{n,j}]_{n=1,j=1}^{\infty,\infty}$, где $a_{n,j} = 0$, если $n > j$, $a_{n,j} = (1 + j - n)A_{1+j-n}$ если $n \le j$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 2A_2 & 3A_3 & \dots \\ 0 & A_1 & 2A_2 & \dots \\ 0 & 0 & A_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix},$$

c в (9) — бесконечна матрица-столбец искомых коэффициентов $(c_2, c_3, ...)$, $\tilde{B}$ — бесконечная матрица-столбец свободных членов $(-B_{-2}, -B_{-3}, ...)$.

Нетрудно доказать следующее достаточное условие существования решения.

Теорема 1. *Система (9) имеет решение, которое можно построить приближенно в соответствующем бесконечномерном линейном пространстве, если для матрицы A существует левая обратная матрица A^{-1} с конечной нормой.*

Доказательство. Предположим, что функци $-2\mu R_1(t(\theta)) + \kappa R_1(t(\theta))$ имеет ограниченную производную p-го порядка, тогда справедлива оценка $|B_k| \le \frac{M}{|k|^p}$. Следовательно, при $p \ge 2$ и достаточно большом значении n матрица B_n, полученная из матрицы B выбрасыванием верхних n строк и левых n столбцов, будет иметь сколь угодно малую норму в бесконечномерных линейных пространствах. Если отбросить верхние n строк и левые n столбцов матрицы A, мы снова получим ту же матрицу A.

В системе (9) отбросим верхние n уравнений, а искомые коэффициенты $c_2, c_3, ..., c_{n+1}$ в оставшихся уравнениях перенесем в правую часть. Мы получим систему

$$(B_n - A)\tilde{c} = \tilde{C}, \tag{10}$$

где $\tilde{c}$ — бесконечная матрица-столбец коэффициентов $(c_{n+2}, c_{n+3}, ...)$, а $\tilde{C}$ — матрица-столбец, содержащая неизвестные коэффициенты $c_2, c_3, ..., c_{n+1}$. Умножая на левую обратную матрицу, получим из (10)

$$(I - A^{-1}B_n)\tilde{c} = -A^{-1}\tilde{C}. \tag{11}$$

При достаточно большом значении n матрица $D = A^{-1}B_n$ будет иметь норму, меньшую 1, и коэффициенты $\tilde{c} = (c_{n+2}, c_{n+3}, ...)$ согласно (11) могут быть с любой точностью получены с помощью итераций: $\tilde{c} = -(I + D + D^2 + D^3 + ...)A^{-1}\tilde{C}$. Естественно, что коэффициенты в $\tilde{c}$ будут линейно зависеть от коэффициентов $c_2, c_3, ..., c_{n+1}$.

Теперь подставим в первые n уравнений системы (9) коэффициенты $c_{n+2}, c_{n+3}, ...$, выраженные линейно через $c_2, c_3, ..., c_{n+1}$. Мы получим систему из n линейных уравнений относительно n неизвестных $c_2, c_3, ..., c_{n+1}$. Получив значения этих коэффициентов, мы найдем все коэффициенты тейлоровского разложения искомой функции.

Примером матрицы A, обладающей левой обратной матрицей A^{-1} с конечной нормой, является простейшая ленточная матрица

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 2A_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A_1 & 2A_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A_1 & 2A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \end{pmatrix},$$

при $|A_2| < |A_1|/2$. В этом случае матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/A_1 & -2A_2/A_1^2 & 4A_2^2/A_1^3 & -8A_2^3/A_1^4 & \dots \\ 0 & 1/A_1 & -2A_2/A_1^2 & 4A_2^2/A_1^3 & \dots \\ 0 & 0 & 1/A_1 & -2A_2/A_1^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \end{pmatrix}.$$

имеет конечную норму при действии в пространствах типа l_p. Заметим, что функци $F(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{2} A_k\zeta^k$ при $|A_2| < |A_1|/2$ удовлетворяет в единичном круге условию $F'(\zeta) \neq 0$.

То, что решение системы (9) может быть неединственным, доказывает следующее утверждение.

Теорема 2. *В случае, когда* $B_{-k} = 0$, $k \in N$, *а для функции* $F(\zeta)$ *существует точка* ζ_0, $|\zeta_0| < 1$, *такая что* $F'(\zeta_0) = 0$, *система (9) наряду с нулевым решением имеет решение* $(\zeta_0, \zeta_0^2, \zeta_0^3, ...)$.

Доказательство. Существование нулевого решения очевидно. Этому решению соотвтетствует искомая область в виде круга. Последовательность $(\zeta_0, \zeta_0^2, \zeta_0^3, ...)$ также будет решением, так как справедливы соотношения

$\zeta_0^k F'(\zeta_0) = 0$ для всех неотрицательных целых k. Эти соотношения равносильны справедливости системы равенств

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \zeta_0^k (k-n) A_{k-n} = 0, \ n \in N.$$

Решению $(\zeta_0, \zeta_0^2, \zeta_0^3, ...)$ соответствует искомая область, получаемая отображением единичного круга с помощью функции

$$z(\zeta) = c_1\zeta + \sum_{k=2}^{\infty} \zeta_0^{k-1}\zeta^k = c_1\zeta + \frac{\zeta_0\zeta^2}{1-\zeta_0\zeta}.$$

Заметим, что условие $F'(\zeta_0) = 0$ при $|\zeta_0| < 1$ свидетельствует о неоднолистности функции $F(\zeta)$ в единичном круге.

4. Заключение

Предлагаемая постановка обратной краевой задачи теории упругости позволяет проектировать плоские области с заранее известными усилиями, возникающими на границе области при заданных граничных смещениях.

Литература

1. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1965.

2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Изд. Наука, 1966.

Широкова, Елена Александровна – доктор физико-математических наук, заведующая кафедрой общей математики института Математики и Механики им. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

E-mail: *Elena.Shirokova@kpfu.ru*